Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2008

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

1 martie 2008

CLASA A XII-A
SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Subiectul 1. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. Să se arate că există $c \in (0,1)$ astfel încât $f(c) = \int_0^c f(x)\mathrm{d}x$.

Soluţie. Fie $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Atunci

$$F(1) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xF'(x)\mathrm{d}x = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$$
$$= F(1) - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x,$$

deci $\displaystyle\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = 0$. ....**2 puncte**

Rezultă că funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x F(t)\mathrm{d}t$, satisface condiţiile din teorema lui Rolle: $g(0) = 0 = g(1)$. Aşadar, există un punct $b \in (0,1)$, astfel încât $g'(b) = 0$, *i.e.*,

$$F(b) = \int_0^b F(x)\mathrm{d}x.$$

....**2 puncte**

Deci funcţia $G : [0,b] \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - \displaystyle\int_0^x F(t)\mathrm{d}t$, satisface condiţiile din teorema lui Rolle: $G(0) = 0 = G(b)$. Prin urmare, există un punct $c \in (0,b)$, astfel încât $G'(c) = 0$, *i.e.*,

$$f(c) = \int_0^c f(x)\mathrm{d}x.$$

....**3 puncte**

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică, de perioadă T. Dacă F este o primitivă a lui f, să se arate că:

a) funcţia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$G(x) = F(x) - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

este periodică;

b) avem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{F(k)}{n^2+k^2} = \frac{\ln\sqrt{2}}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

Soluţie. **(a)** Fie $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + c$. Atunci

$$\begin{aligned}
G(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t + c - \frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t + c - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t - \int_0^T f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + c - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \\
&= F(x) - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \\
&= G(x).
\end{aligned}$$

.... **3 puncte**

(b) Funcţia G este mărginită pe $\mathbb{R}$, deoarece este continuă şi periodică. Fie $M = \max\{|G(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Întrucât

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{G(k)}{n^2+k^2}\right| < \frac{M}{n},$$

.... **1 punct**

rezultă că

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{F(k)}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{G(k)}{n^2+k^2} + \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&= \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{\ln\sqrt{2}}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

. . . . **3 puncte**

Subiectul 3. Fie A un inel comutativ cu un număr impar de elemente. Dacă n este numărul soluţiilor ecuaţiei $x^2 = x$, $x \in A$, iar m este numărul elementelor inversabile ale inelului A, să se arate că n divide m.

Soluţie. Fie $I(A) = \{x : x \in A, x^2 = x\}$. Dacă $x \in I(A)$, atunci $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 = 1$, deci $2x - 1 \in U(A)$. . . . . **2 puncte**

Întrucât $2 \in U(A)$ — A are un număr impar de elemente —, funcţia $f : I(A) \to U(A)$, $f(x) = 2x - 1$, este injectivă, deci $|I(A)| = |\operatorname{Im} f|$. **2 puncte**

Vom arăta că $\operatorname{Im} f$ este un subgrup al lui $U(A)$. Acest lucru poate fi demonstrat în două moduri:

(1) Fie $u, v \in \operatorname{Im} f$, $u = 2x - 1$, $v = 2y - 1$, unde $x, y \in I(A)$. Dacă $z = 2^{-1}(uv + 1)$, atunci $2z = uv + 1 = (2x-1)(2y-1) + 1$, deci $4z^2 = ((2x-1)(2y-1)+1)^2 = 1 + (2x-1)(2y-1) + 1 = 2(uv+1) = 4z$, *i.e.*, $z \in I(A)$, deoarece $4 \in U(A)$. Aşadar, $uv = 2z - 1 \in \operatorname{Im} f$, *i.e.*, $\operatorname{Im} f$ este un subgrup al lui $U(A)$.

(2) Arătăm că $\operatorname{Im} f$ este subgrupul $U'(A) = \{u : u \in U(A), u^2 = 1\}$ al unităţilor de pătrat 1. Incluziunea $\operatorname{Im} f \subseteq U'(A)$ rezultă din primul paragraf. Invers, dacă $u \in U'(A)$, calcule elementare arată că $x = 2^{-1}(u+1) \in I(A)$ şi $f(x) = u$. Deci $\operatorname{Im} f = U'(A)$.

Prin urmare, $|I(A)| = |\operatorname{Im} f| = |U'(A)|$ este un divizor al lui $|U(A)|$. . . **3 puncte**

Subiectul 4. Fie K un corp finit. Spunem că două polinoame f şi g din $K[X]$ sunt *vecine* dacă au acelaşi grad şi diferă prin exact un coeficient.

a) Să se arate că toţi vecinii polinomului $X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ sunt reductibili.

b) Dacă numărul elementelor lui K este $q \geq 4$ să se arate că orice polinom de grad $q - 1$ din $K[X]$ are atât un vecin reductibil cât şi un vecin care nu are nici o rădăcină în K.

Soluţie. **(a)** Vecinii polinomului $X^2 + \hat{1}$ sunt: $2X^2 + \hat{1}$, $X^2 + X + \hat{1}$, $X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$, X^2 şi $X^2 + \hat{2}$. Fiecare dintre aceste polinoame are o rădăcină în $\mathbb{Z}_3$, deci este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. . . . . **2 puncte**

(b) Fie $f \in K[X]$, $\deg f = q - 1$. Dacă $\tilde{f}(0) = 0$, alegem vecinul $g = f + X$, iar dacă $\tilde{f}(0) = \alpha \neq 0$, alegem vecinul $h = f - \alpha$; $\tilde{g}(0) = 0 = \tilde{h}(0)$, deci g şi h sunt reductibile în $K[X]$. . . . . **2 puncte**

Reamintim că

$$\sum_{\alpha \in K} \alpha^s = \begin{cases} 0, & \text{dacă } (q-1) \nmid s, \\ -1, & \text{dacă } (q-1) \mid s,\ s \geq 1. \end{cases}$$

Fie $f = \sum_{i=0}^{q-1} a_i X^i$. Distingem următoarele două cazuri:

Cazul 1: $a_0 = 0$. Întrucât

$$\sum_{\alpha \in K} \tilde{f}(\alpha) = \sum_{\alpha \in K} \sum_{i=0}^{q-1} a_i \alpha^i = \sum_{i=0}^{q-1} a_i \left(\sum_{\alpha \in K} \alpha^i \right) = -a_{q-1} \neq 0,$$

rezultă că funcţia polinomială asociată $\tilde{f} : K \to K$ nu este surjectivă — în caz contrar, $\sum_{\alpha \in K} \tilde{f}(\alpha) = \sum_{\alpha \in K} \alpha = 0$. Prin urmare, există $s \in K^* \setminus \operatorname{Im} \tilde{f}$, deoarece $0 \in \operatorname{Im} \tilde{f}$. În acest caz, polinomul $g = f - s$ este vecin cu f şi nu are rădăcini în K. ....**1 punct**

Cazul 2: $a_0 \neq 0$. Dacă $f = a_{q-1}X^{q-1} + a_0$, atunci $\operatorname{Im} \tilde{f} = \{a_0, a_{q-1} + a_0\}$, deci există $s \in K^* \setminus \operatorname{Im} \tilde{f}$, deoarece K are cel puţin patru elemente. Polinomul $g = f - s$ este vecin cu f şi nu are rădăcini în K.

Dacă există un indice $i \in \{1, 2, \cdots, q-2\}$, astfel încât $a_i \neq 0$, considerăm polinomul $h = X^{q-i-1} f$. Întrucât

$$\sum_{\alpha \in K} \tilde{h}(\alpha) = \sum_{j=0}^{q-1} a_j \left(\sum_{\alpha \in K} \alpha^{q-i+j-1} \right) = -a_i \neq 0,$$

rezultă că funcţia polinomială asociată $\tilde{h} : K \to K$ nu este surjectivă. Prin urmare, există $s \in K^* \setminus \operatorname{Im} \tilde{h}$, deoarece $0 = \tilde{h}(0) \in \operatorname{Im} \tilde{h}$. Polinomul $g = f - sX^i$ este vecin cu f şi nu are rădăcini în K: $\tilde{g}(0) = \tilde{f}(0) \neq 0$, iar dacă ar exista $\alpha \in K^*$ astfel încât $\tilde{g}(\alpha) = 0$, atunci $s = \alpha^{q-1}s = \alpha^{q-i-1}(s\alpha^i) = \alpha^{q-i-1}(\tilde{f}(\alpha) - \tilde{g}(\alpha)) = \alpha^{q-i-1}\tilde{f}(\alpha) = \tilde{h}(\alpha) \in \operatorname{Im} \tilde{h}$ — contradicţie.

....**2 puncte**